

2. Schulaufgabe Mathematik am _____
Klasse 10a; Name **Gregor Bachl**

1. Berechne die angegebenen Teile:
- a) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit den Katheten $a = 5\text{ cm}$ und $c = 12\text{ cm}$. Berechne die Innenwinkel α und γ sowie den Flächeninhalt des Umkreises.
- b) Vom allgemeinen Dreieck ABC sind $b = 6\text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$ und $\gamma = 80^\circ$ bekannt. Berechne die Seitenlängen a und c .
- c) Im Dreieck PQR sind die Seitenlängen: $a = 4,5\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$ und $c = \frac{b}{2}$. Berechne die Innenwinkel.
2. Die Punkte $P(\cos \varphi + 3 \mid 5 - \sin^2 \varphi)$ sind für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ gegeben.
- 2.1 Berechne die Koordinaten für die Punkte P mit $\varphi \in \{30^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$ und zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem. ($0 \leq x \leq 7$; $0 \leq y \leq 8$; 1 LE = 2 cm auf beiden Achsen)
- | | |
|--|--|
| | |
| | |
| | |
| | |
- 2.2 In welchem x-Intervall bewegen sich die Punkte P? Begründung!
- 2.3 Welcher Winkel φ liefert Punkte mit der Abszisse 3,5?
- 2.4 Berechne die Belegung für φ , so dass Punkte mit dem y-Wert 4,5 entstehen?

1 *1*
2 *2*
3 *3*
4 *4*
5 *5*
6 *6*
7 *7*
8 *8*
9 *9*
0 *0*
-> *\$I*
cr *\$M*
<- *\$H*
Pkte

- 2.5 Berechne den Trägergraphen f der Punkte P und trage ihn in die Skizze zu 2.1 ein
- 2.6 Für welchen Winkel φ erhält man den Punkt P_0 mit der kleinsten Ordinate?
- 3.1 Die Seite $c = [AB]$ eines Dreiecks mit dem Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ ist 8 cm lang. Der Punkt C ist von A eine Strecke von $12 \cdot \cos \alpha$ cm entfernt. $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$
Berechne die Länge der Strecke $b = [AC]$ und zeichne das Dreieck ABC für $\alpha = 40^\circ$
- 3.2 Zeige, dass man den Flächeninhalt des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α wie folgt darstellen kann. $A(\alpha) = 24 \sin 2\alpha$
- 3.3 Für welche Belegung von α wird die Fläche A maximal? Begründung
- 3.4 Wie muss man das Grundmengenintervall einschränken, damit ordentliche Dreiecke ABC entstehen?
- 3.5 Für welchen Wert von α erhält man Dreiecke mit einem Flächeninhalt von 16 FE? Zeichne diese Dreiecke in die Skizze von 3.1 ein.

* «KLASSE» *

* «NAME» \$ I «VORNAME» \$ I *

1. Berechne die angegebenen Teile:

- a) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit den Katheten $a = 5$ cm und $c = 12$ cm. Berechne die Innenwinkel α und γ sowie den Flächeninhalt des Umkreises.

$$\alpha = \arctan \frac{5}{12} = 22,62^\circ; \gamma = 67,38^\circ; \text{Hypotenuse} = \text{Umkreisdurchmesser} = 13 \text{ cm}$$

$$\text{Flächeninhalt } A = 6,5^2 \cdot \pi = 42,25 \pi = 132,73 \text{ [cm}^2\text{]}$$

- b) Vom allgemeinen Dreieck ABC sind $b = 6$ cm, $\alpha = 40^\circ$ und $\gamma = 80^\circ$ bekannt. Berechne die Seitenlängen a und c .

$$\beta = 60^\circ; \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{c}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a = 4,45 \quad c = 6,82$$

- c) Im Dreieck PQR sind die Seitenlängen: $a = 4,5$ cm, $b = 7$ cm und $c = \frac{b}{2}$. Berechne die Innenwinkel.

$$c = 3,5; \quad b \text{ ist längste Seite daher } \beta \text{ zuerst.}$$

$$7^2 = 4,5^2 + 3,5^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 3,5 \cdot \cos \alpha; \quad \alpha = \arccos \frac{16,5}{-31,5} = \arccos 0,5238 = 121,59^\circ$$

$$\frac{3,5}{\sin \gamma} = \frac{7}{\sin 121,59^\circ}; \Rightarrow \sin \gamma = \frac{3,5}{7} \cdot \sin 121,59^\circ = 0,4259; \Rightarrow \gamma = 25,21^\circ; \Rightarrow \beta = 33,20^\circ$$

2. Die Punkte $P(\cos \varphi + 3 \mid 5 - \sin^2 \varphi)$ sind für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ gegeben.

- 2.1 Berechne die Koordinaten für die Punkte P mit $\varphi \in \{30^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$ und zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem. ($0 \leq x \leq 7$; $0 \leq y \leq 8$; 1 LE = 2 cm auf beiden Achsen)

φ	x	y
30°	3,87	4,75
120°	2,5	4,25
150°	2,13	4,75

2.2 In welchem x -Intervall bewegen sich die Punkte P ? Begründung!

$$x \in [2; 4]; \text{ weil } \cos \varphi \text{ im angegebenen Intervall für } \varphi \text{ zwischen } -1 \text{ und } 1 \text{ schwankt.}$$

2.3 Welcher Winkel φ liefert Punkte mit der Abszisse 3,5?

$$3,5 = \cos \varphi + 3; \Rightarrow \cos \varphi = 0,5; \Rightarrow \varphi = 60^\circ \text{ [} \vee \varphi = 300^\circ \text{]}$$

2.4 Berechne die Belegung für φ , so dass Punkte mit dem y -Wert 4,5 entstehen?

$$4,5 = 5 - \sin^2 \varphi; \Rightarrow \sin^2 \varphi = 0,5; \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}; \Rightarrow \varphi = 45^\circ \vee \varphi = 135^\circ$$

* «KLASSE» *

* «NAME» \$ I «VORNAME» \$ I *

2.5 Berechne den Trägergraphen f der Punkte P und trage ihn in die Skizze zu 2.1 ein

$$x = \cos \varphi + 3 \Rightarrow \cos \varphi = x - 3;$$

$$y = 5 - \sin^2 \varphi; \text{ mit } \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi; \Rightarrow y = 5 - (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$y = 4 + \cos^2 \varphi$$

$$y = 4 + (x-3)^2$$

$$y = 4 + x^2 - 6x + 9$$

$$y = x^2 - 6x + 13$$

2.6 Für welchen Winkel φ erhält man den Punkt P_0 mit der kleinsten Ordinate? Algebraische Begründung!

$$\text{kleinste Ordinate } 4 = 5 - \sin^2 \varphi \Leftrightarrow \sin^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ \text{ [} \vee \varphi = 270^\circ \text{]}$$

3.1 Die Seite $c = [AB]$ eines Dreiecks mit dem Winkel $\angle BAC = \alpha$ ist 8 cm lang. Der Punkt C ist von A eine Strecke von $12 \cdot \cos \alpha$ cm entfernt. $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ Berechne die Länge der Strecke $b = [AC]$ und zeichne das Dreieck ABC für $\alpha = 40^\circ$

$$b = 12 \cdot \cos 40^\circ = 9,19$$

3.2 Zeige, dass man den Flächeninhalt des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α wie f folgt darstellen kann. $A(\alpha) = 24 \sin 2\alpha$

$$h = 12 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 6 \sin 2\alpha$$

$$A = 0,5 \cdot 8 \cdot 6 \sin 2\alpha = 24 \sin 2\alpha$$

3.3 Für welche Belegung von α wird die Fläche A maximal? Begründung

$$\text{Wenn } \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \text{ wird } A_{\max} = 24 \text{ FE.}$$

3.4 Wie muss man das Grundmengenintervall einschränken, damit ordentliche Dreiecke ABC entstehen?

$$\alpha \in]0; 90^\circ[; \text{ nur hierfür liegt } C \text{ oberhalb der } x\text{-Achse (oder Gerade } AB\text{)}$$

3.5 Für welchen Wert von α erhält man Dreiecke mit einem Flächeninhalt von 16 FE? Zeichne diese Dreiecke in die Skizze von 3.1 ein.

$$16 = 24 \sin 2\alpha; \Rightarrow \sin 2\alpha = 0,6667; \Rightarrow 2\alpha = 41,81^\circ \vee 2\alpha = 138,19^\circ \\ \alpha = 20,91^\circ \vee \alpha = 69,09^\circ$$

Skizze zu 3.1 und 3.5

